Утверждены
на заседании Центральной предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по математике
(протокол № 2 от 03.06.2016 г.)

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников в 2016/2017 учебном году по математике

Содержание

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013 г., с изменениями № 249 от 17 марта 2015 г., № 1488 от 17 декабря 2015 г.), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам. Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016/2017 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июня 2016 года).

Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4-11 классов**.

В соответствии с разделом III Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4-11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4 класса – 1-2 урока, для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 3-4 урока.

Согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором школьного этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику

возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 4-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 4-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематику олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

IV-V КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания школьного этапа олимпиады

Приведенные типовые задания школьного этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех муниципальных образований, в силу заметной разницы в уровне развития в различных городах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Муниципальным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать территориальную специфику. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий школьного этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику.

Четвертый класс

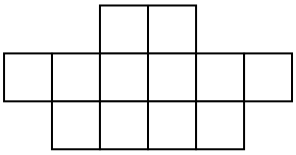
4.1. На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см^2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

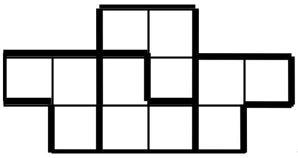
Ответ. Не может.

Решение. Сторона квадрата равна 5 см. Поэтому стороны прямоугольника равны 6 см и 3 см, а его площадь равна 18 см^2.

4.2. Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** = 197.

Ответ. 99+98=197.

4.3. Разрежьте фигурку  на четыре равных клетчатых фигурки.

Ответ. .

4.4. Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.

Пятый класс

5.1. Поставьте вместо звездочек знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство: $1*2*3*4*5=6$.

Ответ. $1+2\cdot 3+4-5=6$.

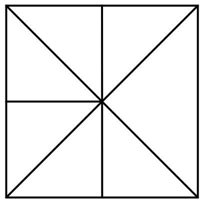
5.2. Поросята Ниф-Ниф и Нуф-Нуф бежали от Волка к домику Наф-Нафа. Если бы поросята не убегали, а стояли на месте, Волк добежал бы до них за 4 минуты. Поросятам бежать до домика Наф-Нафа 6 минут. Волк бежит в 2 раза быстрее поросят. Успеют ли поросята добежать до домика Наф-Нафа?

Ответ. Успеют.

Решение. От места расположения поросят до их дома волку бежать 6:2=3 минуты, т.е. всего ему бежать 4+3=7 минут.

5.3. Разрежьте квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых.

Решение. Один из возможных способов разрезания приведен на рисунке.

.

5.4. Джузеппе делает одного Буратино за 1 час 45 минут. После каждых трех сделанных Буратино Джузеппе вынужден отдыхать полчаса. Папа Карло принес Джузеппе заказ на 10 Буратино. Во сколько Карло может прийти за выполненным заказом, если сам заказ он принес в 18 часов 30 минут?

Ответ. 13:30 следующего дня.

Решение. Один Буратино делается за 1 час 45 минут, то есть за 105 минут. Тогда 10 Буратино делаются за 1050 минут. При этом Джузеппе вынужден будет отдохнуть 3 раза по 30 минут, то есть 90 минут. Итого на весь заказ уйдет 1140 минут. Это составляет ровно 19 часов. Если он начинает в 18:30, то заканчивает в 13:30.

Шестой класс

6.1. Петя, Вася и Толя – три брата. Известно, что Вася в 2 раза старше Пети, Толя в 5 раз старше Пети, и Вася на 6 лет младше Толи. Сколько лет каждому из братьев?

Ответ. Пете 2 года, Васе 4 года, Толе 10 лет.

Решение. Разница в возрасте Толи и Васи составляет 3 возраста Пети. Значит, Пете 2 года. Тогда Васе 4 года, а Толе – 10 лет.

6.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

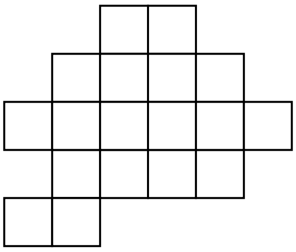
Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

6.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

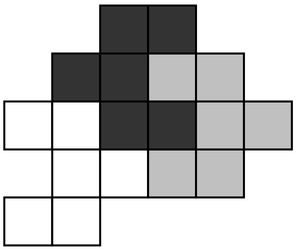
Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

6.4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на три равные части (разрезать можно только по границам клеток).



Решение. Один из возможных способов разрезания приведен на рисунке.



6.5. Перед распродажей ложка и вилка стоили одинаково. На распродаже цену ложки уменьшили на 1 рубль, а цену вилки – в 10 раз. Могло ли случиться, что ложка на распродаже продавалась дешевле вилки?

Ответ. Могло.

Решение. Пусть перед распродажей ложка и вилка стоили по 1 рублю 10 копеек. Тогда на распродаже цена ложки была 10 копеек, а вилки – 11 копеек..

Седьмой класс

7.1. Гвоздь, три винта и два шурупа вместе весят 24 грамма; два гвоздя, четыре шурупа и пять винтов вместе весят 44 грамма. Сколько весит винт?

Ответ. 4 грамма.

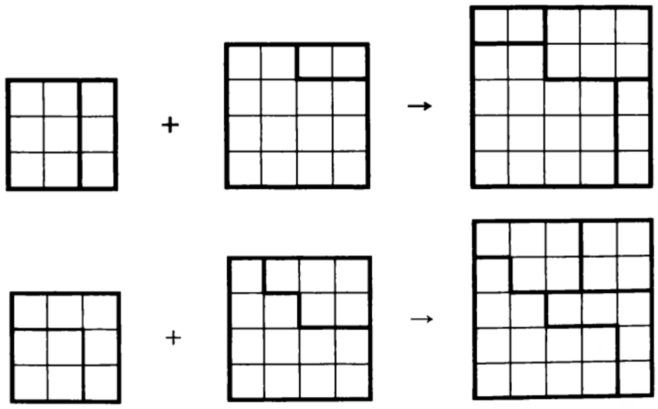
Решение. Из первого условия следует, что два гвоздя, четыре шурупа и шесть винтов вместе весят 48 граммов. Значит, винт весит винт 48 – 44 = 4 грамма.

7.2. Вставьте в окошки цифры 1, 2, 3,…, 9, используя каждую ровно один раз, чтобы получились верные неравенства: $\square < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square}$.

Решение. Например, $1 < \frac{6}{5} < \frac{7}{4} < \frac{8}{3} < \frac{9}{2}$.

7.3. Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рисунке.



7.4. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) фикус, ирис и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

Ответ. Ирис-кактус-фикус.

Решение. Проследим закономерности, по которым меняется набор цветов на балконе: ФИК→ФКИ→КФИ→КИФ→ИКФ→ИФК→КИФ. Далее всё будет повторяться и цветы будут возвращаться на исходные места каждые трое суток. Это значит, что через 363 дня порядок будет тот же, а ещё через двое суток (через четыре перестановки) порядок будет таким: ирис-кактус-фикус.

7.5. У Пети в 4 карманах лежит несколько монет достоинствами в 2, 5 и 10 рублей. В трёх карманах денег поровну, а в четвёртом – вдвое больше, чем в третьем. Могут ли ровно 7 из Петиных монет быть двухрублёвыми?

Ответ. Не могут.

Решение. Общая сумма денег у Пети впятеро больше, чем сумма, лежащая в первом кармане, то есть кратна 5. Если бы у него было ровно 7 двухрублёвых монет, общая сумма денег не делилась бы на 5, так как достоинства остальных его монет делятся на 5.

Восьмой класс

8.1. Петя считает пальцы на левой руке от большого пальца до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счет приходится на другой палец. На какой палец придется число 2016? (Счет: 1 – большой, 2 – указательный, 3 – средний, 4 – безымянный, 5 – мизинец, 6 – безымянный, 7 – средний и т. д.)?

Ответ. Указательный.

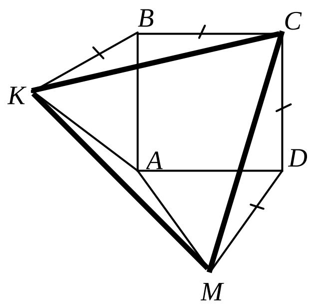
Решение. На большой палец приходится счет 1, 9, 17, 25, …, 2009 так как 2009 = 8·251+1.

8.2. Докажите, что если $a+2b=3c$ и $b+2c=3a$, то $c+2a=3b$.

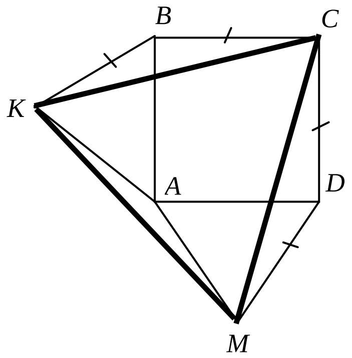
Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки, получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

8.3. На сторонах *AB* и *AD* квадрата *ABCD* вне него построены равносторонние треугольники *ABK* и *ADM*. Докажите, что треугольник *KCM* также равносторонний.



Решение. Заметим, что $\angle KBC=\angle CDM=90°+60°=150°$. Равнобедренные треугольники *KBC* и *CDM* равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, *CK=CM*. $\angle BCK=\angle DCM=(180°-150°):2=15°$, тогда $\angle KCM=90°-15°-15°=60°$. Треугольник *KCM* является равнобедренным с углом $60°$, т.е. равносторонним.



8.4. В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 10 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y=x+10$, $y=2x+9$, $y=3x+8$, $y=4x+7$, $y=5x+6$, проходят через точку (1,11).

8.5. Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма чисел, записанных на гранях всех игральных кубиков равна $(1+2+3+4+5+6)\cdot 8$, то есть четному числу. Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то они все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 99.

Девятый класс

9.1. На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины a. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз b больше a?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за x. Сто тогда делят отрезок длины a на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины b на 9999 промежутков. Поэтому a=99x, b=9999x и b=101a.

9.2. Среднее арифметическое двух чисел составляет 60% от большего из них. Во сколько раз среднее арифметическое этих чисел больше меньшего числа?

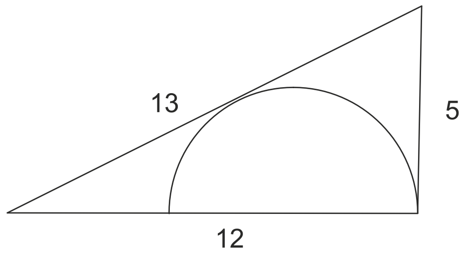
Ответ. В 3 раза.

Решение. Обозначим наши числа через a (меньшее число) и (большее число) b. Тогда по условию $\frac{a+b}{2}=0,6b \Leftrightarrow b=5a$. Тогда $\frac{a+b}{2}=3a$.

9.3. Продавец на рынке хочет разложить кучку из 41 ореха на 41 кучки по одному ореху. Ему разрешается разделить любую кучку на две, но, если при этом получились две неодинаковые кучки, он должен заплатить хозяину рынка 1 рубль. Как ему выполнить свою задачу, заплатив всего 2 рубля?

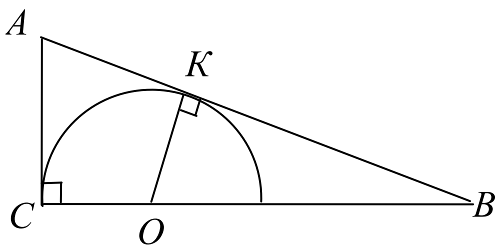
Решение. Например, продавец может сделать так. Сначала он разделит кучку из 41 ореха на две кучки: из 1 ореха и из 40 орехов. Затем кучку из 40 орехов он разделит на две кучки: из 32 орехов и из 8 орехов. За эти операции продавец заплатит 2 рубля. Дальше он бесплатно может делить оставшиеся кучки пополам, пока не получатся кучки из 1 ореха.

9.4. В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вписана полуокружность, как показано на рисунке. Найдите радиус полуокружности.



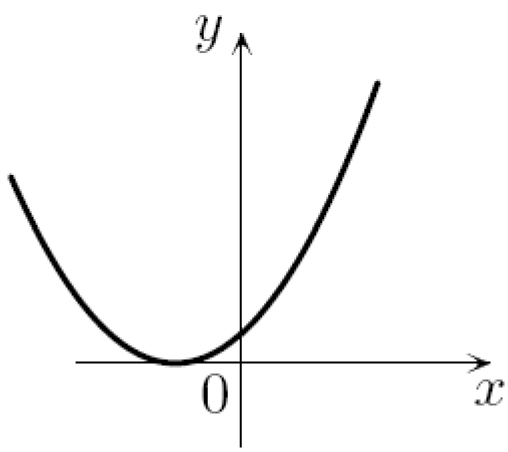
Ответ. $3\frac{1}{3}$**.**

Решение. Обозначим вершины треугольника и проведем радиус в точку касания полуокружности со стороной *AB*. *AC*=*AK*=5 как касательные, проведенные из одной точки, тогда *KB*=13–5=8. Угол *OKB* равен 90°, тогда треугольники *ACB* и *OKB* подобны по двум углам. Пусть *CO*=*OK*=*x* . Из подобия треугольников следует , что $\frac{OB}{AB}=\frac{KB}{CB}\Rightarrow\frac{12-x}{13}=\frac{8}{12}\Rightarrow 3x=10\Rightarrow x=3\frac{1}{3}$.



Замечание. Другое решение можно получить, отразив картинку симметрично относительно катета ВС и посчитав площадь двумя способами: $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=\frac{1}{2}\cdot(10+13+13)\cdot r$.

9.5. Дан график функции $y=x^2+ax+a$ (см. рис.). Найдите *a*.



Ответ. 4.

Решение. График касается оси *Ox*, поэтому дискриминант трехчлена равен нулю: $D=a^2-4a=0$. Отсюда $a=0$ или $a=4$. Но из графика следует, что $a\neq 0$. (Нарисован график трехчлена $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$).

Десятый класс

10.1. На доске написано число 543254325432.Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

10.2. Найдите все пары чисел *x*, *y*, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = –0,5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \geq y$, $x \leq y$, откуда и следует $x = y = – 0,5$.

10.3. Существует ли треугольник, у которого длины всех сторон и всех высот являются целыми числами?

Ответ. Существует.

Решение. Годится, например, прямоугольный треугольник со сторонами 15, 20 и 25. Две его стороны одновременно являются высотами, а высота, проведенная к гипотенузе, равна $h=\frac{ab}{c}=\frac{15\cdot 20}{25}=12$.

10.4. Петя составляет «таблицу умножения». Слева от таблицы он написал натуральные числа от 10 до 75 включительно, сверху – от 11 до 48 включительно. После чего записал в таблицу соответствующие произведения пар чисел. Сколько из выписанных произведений являются четными числами?

Ответ. 1881.

Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечетным, если оба сомножителя нечетны, и четным в остальных случаях. Всего в таблице записано $(75-10+1)\cdot(48-11+1)=2508$ произведений. Заметим, что среди чисел от 10 до 75 будет 33 нечетных числа, а среди чисел от 11 до 48 – 19 нечетных чисел. Поэтому в таблице будет $33\cdot 19=627$ нечетных произведений. Остальные $2508-627=1881$ будут четными.

10.5. Точка *D* – середина стороны *AC* треугольника *ABC*, *DE* и *DF* – биссектрисы треугольников *ADB* и *CDB*. Докажите, что $EF \parallel AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE:EA = BD:DA = BD:DC = BF:FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

Одиннадцатый класс

11.1. По дороге едут велосипедисты: на запад – Вася и Петя с равными между собой скоростями, а на восток – Коля и Миша с равными между собой скоростями. Вася встретился с Мишей в 12.00, Петя с Мишей – в 15.00, Вася с Колей – в 14.00. Когда встретились Петя с Колей?

Ответ. в 17.00.

Решение. Расстояние между Мишей и Колей и их скорости не меняются, а скорости Васи и Пети равны. Вася встретил Колю через 2 часа после Миши, значит, Петя встретят Колю тоже через 2 часа после Миши, т. е. в 17.00.

11.2. В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

11.3. При каких значениях параметра *a* система уравнений $\begin{cases} x-a=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{a}=1 \end{cases}$ имеет решения?

Ответ. При $a=0$.

Решение. Из условия следует, что *x* и *a* – неотрицательные числа. Тогда из равенства $x-a=\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$ следует, что $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=1$. Но $\sqrt{x}+\sqrt{a}=1$. Поэтому $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{x}-\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a}=0$. То есть *a*=0. Осталось заметить, что при *a*=0 система имеет решение *x*=1.

11.4. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение.

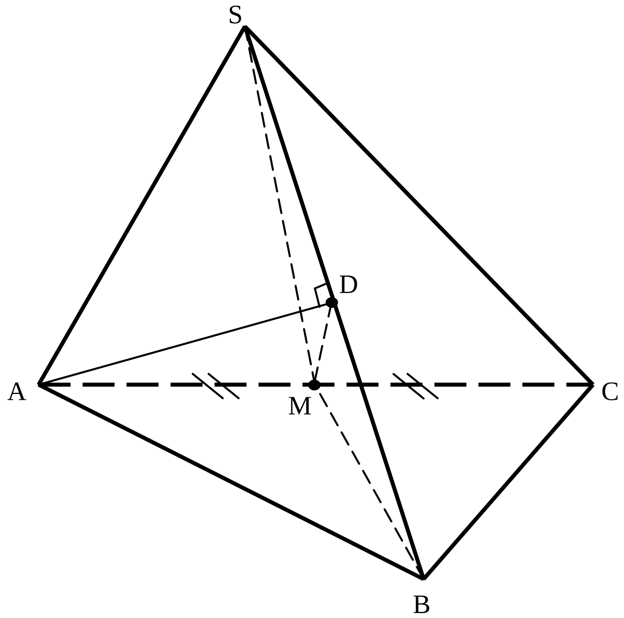
Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105.

Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

11.5. В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S SA/AB=2. Проведены высота AD треугольника SAB и медиана BM треугольника ABC. Найдите отношение MD/BD.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Решение. Обозначим длину отрезка AB за 1, тогда SA=2. Найдём прежде всего длины отрезков BD и SD. Пусть BD=*x*. Тогда, применяя теорему Пифагора к треугольникам ABD и ASD, получаем $AD^2=1-x^2 = 4-(2-x)^2 \Rightarrow BD=x=1/2$. Далее в треугольнике BMD $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, для того чтобы воспользоваться теоремой косинусов, достаточно найти косинус угла MBD. Но из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM=\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow DM^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5}{8} \Rightarrow DM=\frac{\sqrt{10}}{4}$.



Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 — 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/